Informatique

Matrices magiques

Ce TD reprend et complète le problème de Centrale 97 / CCP 98 sur les matrices magiques.

Le package **linalg** (**lin**ear **alg**ebra) sera bien utile pour effectuer toutes sortes d'opérations matricielles :

```
> with(linalg) :
```

0. Définitions

On rappelle les définitions principales :

On appelle matrice **semi-magique** d'ordre, une matrice M de $M_n(R)$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$, vérifiant $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M)$ et $\forall j \in [1, n]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M)$. On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.

On appelle matrice **quasi-magique** d'ordre n, une matrice M de $M_n(R)$ semi-magique vérifiant de plus $\sigma(M) = tr(M)$. On note QM_n l'ensemble des matrices quasi-magiques d'ordre .

On appelle **matrice magique** d'ordre n, une matrice M de $M_n(R)$ quasi-magique vérifiant de plus $\sigma(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$. On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

I. Test du caractère magique

On ne considérera que des matrices à coefficients entiers consécutifs p, $p+1$, ..., $p+n^2-1$ si n est la taille de la matrice.

1. Dire pourquoi on peut supposer, sans perte de généralité, que la matrice contient n^2 entiers consécutifs à partir de 1. Combien vaut alors $\sigma(M)$?

2. Écrire une procédure **est_magique(M)** permettant de tester si une matrice de taille quelconque est (semi-, quasi-) magique.

```
> est_magique := proc(M)
```

3. Tester, p. ex. sur les matrices suivantes :

```
> M1 := matrix(3,3,[8,1,6,3,5,7,4,9,2]) : M2 := matrix(3,3,[1,
```

```
2,3,2,3,1,3,1,2]) :
M3 := matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]) : M4 := matrix(3,3,[1,
0,0,0,0,0,0,0,0]) :
```

3. Que peut-on dire du produit de deux matrices semi-magiques ? De deux matrices magiques ? (Utiliser p. ex. M_1^2.)

II. Construction de matrices magiques

On rappelle l'algorithme proposé pour construire une matrice magique de taille n *impaire* :

On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés et que l'entier k a été placé en i-ème ligne et j-ème colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

- on pose $i_2 = i - 1$ (sauf si $i = 1$ auquel cas on pose $i_2 = n$) et $j_2 = j + 1$ (sauf si $j = n$, auquel cas on pose $j_2 = 1$) ;
- si aucun nombre n'a encore été placé à la i_2-ème ligne et j_2-ème colonne, on y place $k+1$;
- si cet emplacement est pris, on pose $i_2 = i + 1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $i_2 = 1$) et $j_2 = j$ et on place k en i_2-ème ligne et j_2-ème colonne.

1. Écrire une procédure **construction(n)** qui construise, en suivant l'algorithme précédent, une matrice magique de taille n.

```
> construction := proc(n)
```

2. Tester (p. ex. sur les cas $n = 3$ et $n = 5$ présents dans la suite du texte) :